

VU Research Portal

Handleiding voor onderwijs in heterogene groepen. AGO (Adaptief Groeps Onderwijs): een werkwijze die met alle leerlingen rekening houdt. Met voorbeelden uit de wiskunde.

Perrenet, J.Chr.; Herfs, P.G.P.; Terwel, J.

1991

[Link to publication in VU Research Portal](#)

citation for published version (APA)

Perrenet, J. C., Herfs, P. G. P., & Terwel, J. (1991). *Handleiding voor onderwijs in heterogene groepen. AGO (Adaptief Groeps Onderwijs): een werkwijze die met alle leerlingen rekening houdt. Met voorbeelden uit de wiskunde.* Academisch Boeken Centrum.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

E-mail address:

vuresearchportal.ub@vu.nl

Deze handleiding is bedoeld voor docenten die werken met heterogene klassen in de eerste fase van het voortgezet onderwijs. De voorbeelden zijn ontleend aan het wiskunde-onderwijs. Centraal staat een model voor co-operatief leren: het model Adaptief Groepsonderwijs (AGO). Dit model is met het oog op de basisvorming ontworpen. Het AGO-model is in de klaspraktijk beproefd bij wiskunde en geschiedenis.

De hoofdconclusie van deze onderzoeken is positief. Het AGO-model is uitvoerbaar en effectief gebleken. De leereffecten zijn significant en betekenisvol voor de praktijk. Het AGO-model blijkt een haalbaar en effectief alternatief voor de eerste fase voortgezet onderwijs.

Academisch Boeken Centrum

Postbus 132, 2678 ZJ De Lier, telefoon 01745-17811

HANDLEIDING VOOR ONDERWIJS IN HETEROGENE GROEPEN

**AGO (Adaptief Groepsonderwijs):
werkwijze die met alle leerlingen rekening houdt.**

Met voorbeelden uit de wiskunde

J.Chr. Perrenet

P.G.P. Herfs

J. Terwel

Academisch Boeken Centrum

**HANDLEIDING
VOOR ONDERWIJS
IN HETEROGENE GROEPEN**

HANDLEIDING VOOR ONDERWIJS IN HETEROGENE GROEPEN

AGO (Adaptief Groepsonderwijs):
een werkwijze die met alle leerlingen rekening houdt.

Met voorbeelden uit de wiskunde

J.Chr. Perrenet
P.G.P. Herfs
J. Terwel

Academisch Boeken Centrum

Vakgroep Onderwijskunde
ISOR afdeling onderwijsonderzoek
Rijksuniversiteit Utrecht
Heidelberglaan 2
postbus 80140
3508 TC Utrecht

CIP-GEGEVENS KONINKLIJKE BIBLIOTHEEK, DEN HAAG

Perrenet, J.Chr.

Handleiding voor onderwijs in heterogene groepen : AGO (Adaptief Groeps Onderwijs): een werkwijze die met alle leerlingen rekening houdt : met voorbeelden uit de wiskunde / J.Chr. Perrenet, P.G.P. Hefs, J. Terwel. - De Lier : Academisch Boeken Centrum
Met lit. opg.
ISBN 90-72015-77-0
Trefw.: differentiatie (onderwijs).

© Academisch Boeken Centrum, De Lier, 1991

Niets uit deze uitgave mag worden veeveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze dan ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

No part of this book may be reproduced in any form, by print, photoprint, microfilm or any other means without written permission of the publisher.

VOORWOORD

Deze brochure is een praktische uitwerking van een onderwijskundig model voor het werken met heterogene klassen bij wiskunde in de onderbouw van het voortgezet onderwijs. Het is één van de resultaten van het project AGO-12-16*. Het onderzoek wordt gefinancierd door SVO** en uitgevoerd aan de Rijksuniversiteit Utrecht, vakgroep Onderwijskunde/ISOR***. Het AGO-model biedt een werkwijze voor die scholen, die kiezen voor het werken met heterogene klassen.

Voor de concrete invulling werd gebruik gemaakt van enkele hoofdstukken uit de methode Wiskundelijn (Bodegraven, D. van e.a., 1987). De gebruikte voorbeelden in deze brochure zijn voor het merendeel uit de genoemde methode afkomstig, maar in de geest van het AGO-model aangepast. De keuze voor Wiskundelijn is niet principieel geweest, maar gemaakt op grond van respons van leraren om met het onderzoek mee te doen. Ook uit SLO****-materiaal is een voorbeeld opgenomen.

De brochure bevat naast achtergrondinformatie een groot aantal aanwijzingen over hoe in de klas met het AGO-model om te gaan. Deze zijn tot stand gekomen in overleg met de betrokken leraren en de gebruikte wiskundemethode. We beseffen, dat de gemaakte keuzen niet de enige zijn. Zonder de hoofdlijnen van het model aan te tasten, zijn deels afwijkende uitwerkingen mogelijk. Uiteindelijk blijkt in de klas wat wenselijk en haalbaar is. Voor opmerkingen houden we ons aanbevolen.

De brochure richt zich op (wiskunde)leraren met heterogene groepen en verder op hen die op andere wijzen bij het (wiskunde)onderwijs betrokken zijn, zoals opleiders, onderzoekers en ontwikkelaars.

De auteurs, april 1991

- **** AGO 12-16 = Adaptief Groeps Onderwijs voor 12 tot 16-jarigen
- **** SVO = Het Instituut voor Onderzoek van het Onderwijs
- **** ISOR = Interdisciplinair Sociaal Wetenschappelijk Onderzoeksinstituut Rijksuniversiteit Utrecht
- **** SLO = Instituut voor Leerplan Ontwikkeling

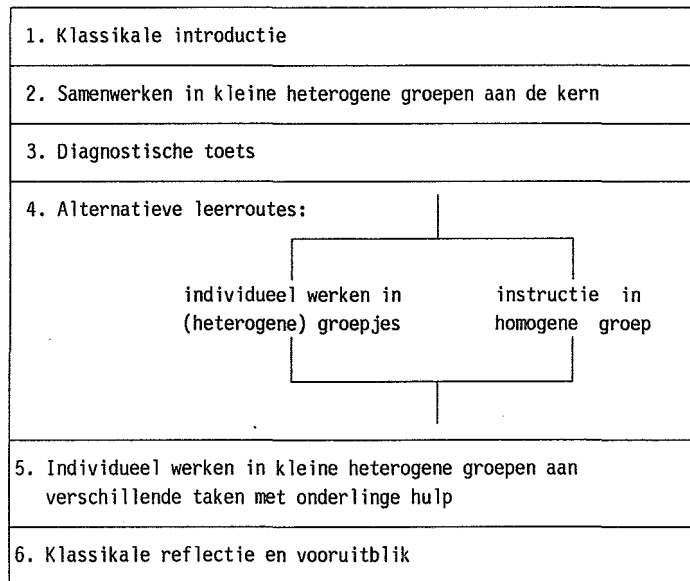
INHOUD

Voorwoord	1
1. Inleiding	2
2. Gemeenschappelijke Kern	4
2.1 Overzicht	4
2.2 Klassikale introductie	4
2.3 Samenwerken in heterogene groepen en de rol van de docent	7
2.4 Vormen van groepswork, soorten opgaven	8
2.5 Huiswerk tijdens de gemeenschappelijke fase	19
3. Diagnostische Toets en daarna	21
3.1 Diagnostische toets	21
3.2 Gescheiden leerwegen	21
3.3 Afsluitend klasgesprek	23
4. Achtergronden	24
4.1 Wiskundendidactiek	24
4.2 Cognitieve theorieën over leren en onderwijzen	26
4.3 Het project Interne Differentiatie wiskundeonderwijs 12-16	28
5. Discussie	31
6. Literatuur	36

1. INLEIDING

Adaptief Groeps-Onderwijs staat voor onderwijs met gebruik van en aanpassing aan verschillen tussen leerlingen. Hierbij wordt gedacht aan leerlingen in de eerste en tweede klas van het voortgezet onderwijs; de aanduiding 12-16 in de naam van het project (AGO 12-16) duidt op de leeftijd van de leerlingen. De aanpassing houdt in, dat naast groepsonderwijs ook andere werkvormen worden gebruikt, zoals klassikaal onderwijs en individueel werk. De samenwerking binnen de groepen is erop gericht, dat de leerlingen van de onderlinge verschillen profiteren. De aanpassing betekent ook, dat de leerlingen na een gemeenschappelijke periode, afhankelijk van de resultaten op een diagnostische toets, een eigen leerweg volgen met minimaal de keuze uit: extra uitleg en herhaling of verdieping en uitbreiding.

Lesgeven volgens het AGO-model betekent het doorlopen van cycli die globaal de volgende vorm hebben:



In de hoofdstukken 'Gemeenschappelijke Kern' en 'Diagnostische Toets en daarna' zullen de componenten van de cyclus concreet worden ingevuld. Daarbij komen de volgende kenmerken telkens terug:

- a) aansluiting bij de voorkennis van de leerlingen door een tussentoets en het gebruik van alternatieve leerroutes.
- b) flexibele groepeeringswijzen:
 - klassikale introducties en reflecties
 - individueel werken aan taken
 - coöperatie in kleine heterogene groepjes
 - gerichte instructie door de leraar in homogene groepjes
- c) vaak voorkomende en directe feedback en remediërende activiteiten
- d) variatie in leertijd met het oog op het bereiken van een zo hoog mogelijk beheersingsniveau door alle leerlingen
- e) variatie in didactische methode en materiaal.

Uit de opsomming van deze kenmerken blijkt, dat het model meer is dan een Basisstof-Herhalingsstof-Extrastof model: de componenten kunnen niet los gezien worden van de didactische invulling. Ook moge duidelijk zijn, dat het model veel meer omvat dan alleen het werken in groepen. Met name de aanwezigheid van de diagnostische toets en het vervolg daarop geven dit aan.

In het hoofdstuk 'Achtergronden' wordt het waarom van deze vorm van wiskundeonderwijs toegelicht. Vanuit drie invalshoeken, te weten wiskundendidactiek, cognitieve theorieën omtrent leren en onderwijzen en eigen onderzoeksresultaten zal de nadere uitwerking worden onderbouwd.

In de lopende fase van het project, de uitvoerbaarheidsfase, wordt het AGO-model aan de praktijk getoetst. In het hoofdstuk Discussie wordt een aantal kritische aspecten opgesomd, waarop daarbij speciaal gelet zal worden. In dat hoofdstuk zullen de uitgangspunten van het model ook geconfronteerd worden met andere opvattingen over de inrichting en vormgeving van het wiskunde-onderwijs. In het onderzoek zal deze vergelijking later plaatsvinden - in de zogeheten effectiviteitsfase - door de resultaten af te zetten tegen die van scholen waar op andere wijze wordt gewerkt.

In het hoofdstuk Literatuur tenslotte wordt de geïnteresseerde lezer voor meer informatie bij diverse onderwerpen verwezen naar andere bronnen.

2 GEMEENSCHAPPELIJKE KERN

2.1 Overzicht

Bij een AGO-cyclus moet gedacht worden aan een serie van ongeveer 10 lessen over een zelfde onderwerp: een hoofdstuk uit een leerboek of een leerstofpakketje. Grofweg gedurende tweederde van de cyclus wordt er door de gehele klas gelijk op gewerkt. Hierbij wordt groepswork afgewisseld met klassikale momenten en individueel bezig zijn. De aard van de opgaven moet zodanig zijn, dat zowel zwakke als sterke leerlingen aan hun trekken komen. Het gemeenschappelijk deel bestrijkt de componenten 1)Klassikale introductie, 2)Groepswork en 3)Diagnostische toets.

Na het gemeenschappelijk deel gaan de leerlingen, afhankelijk van de resultaten op de diagnostische toets, op hun eigen niveau verder. Bij de diagnostische toets zal waarschijnlijk gebleken zijn, dat sommige leerlingen de kernstof nog onvoldoende beheersen. Deze leerlingen krijgen, met name de eerste les(sen) na de toets, extra aandacht van de leraar om hen alsnog tot het vereiste niveau te brengen. Ze krijgen voor enige tijd in een groep apart les. De andere leerlingen krijgen, doordat zij werken met moeilijker stof, de gelegenheid zich verder te ontwikkelen. Deze werkvormen vullen component 4)Alternatieve leerroutes. Later werkt men weer in groepen, maar nu niet allemaal met dezelfde inhoud. In deze fase, component 5)Individueel werken in groepen, blijven zekere vormen van samenwerking mogelijk. In de laatste les voor de eindtoets tenslotte wordt klassikaal de gehele stof van het hoofdstuk nog eens bekeken: component 6)Klassikale afsluiting.

Na deze globale schets volgt een meer gedetailleerde uitwerking van de componenten met daarbij concrete voorbeelden ter toelichting. Dit hoofdstuk bestrijkt het gemeenschappelijk deel van de AGO-cyclus tot aan de diagnostische toets; het volgende beschrijft de diagnostische toets en het vervolg erop.

2.2 Klassikale introductie

De klassikale introductie is bedoeld om de leerlingen te motiveren, om een overzicht te geven van wat het hoofdstuk te bieden heeft en om de benodigde voorkennis op te halen. Daarbij kunnen één of meer inleidende problemen behandeld worden.

Het is belangrijk in deze fase om na te gaan wat de leerlingen al weten en kunnen met betrekking tot het onderwerp van het hoofdstuk. Beter dan het door de leraar laten zien en horen van de vereiste voorkennis - een schets op het bord met een verhaal daarbij - is het de

leerlingen actief mee te laten doen, uit te vissen waar de hiaten zitten in kennis en vaardigheid en pas daarna zodig een stukje gerichte instructie te geven. Verschillende methoden om de lacunes bij de leerlingen te ontdekken zijn: het gebruik van de Socratische dialoog en het gebruik van eigen producties (van leerlingen). Deze werkvormen zullen beide aan de hand van een voorbeeld worden toegelicht. Beide vormen kunnen ook in diverse andere fasen van de AGO-cyclus gebruikt worden.

De Socratische dialoog

Deze gespreksvorm is ook wel bekend onder de naam onderwijsleer-gesprek. De essentie is de leerlingen actief bij het gesprek te betrekken door als leraar niet meteen met antwoorden te komen, maar verder te vragen, door antwoorden van leerlingen niet meteen als goed of fout te beoordelen maar naast elkaar te zetten en te vragen om toelichting.

Een voorbeeld, zoals we het meemaakten in een tweede klas:

In een hoofdstuk over breuken werd op een gegeven moment op de vraag "Hoe schrijf je 320 als breuk?" het antwoord $320/0$ gegeven. De leraar legde het probleem aan de klas voor:

Docent: Wat is $320/0$? Wie weet het?

Casper: 0

Sietske: -320

Peter: 320

De docent zet de antwoorden op het bord en laat de leerlingen met vingers aangeven voor welk getal ze stemmen.

Docent: Tja, wat moeten we nu? Weet je wat, we kunnen het ook de rekenmachine vragen.

Enkele leerlingen: Error!

Hier besloot de docent tot uitleg over te gaan: Hij liet het verband tussen delen en vermenigvuldigen zien ($12/3=4$, want $12=3 \times 4$) en toonde daarmee aan dat geen der antwoorden goed was en dat zelfs geen enkele uitkomst mogelijk was; vandaar ook 'error' op de computer. $320/0$ kan niet; delen door 0 kan niet.

Waarom stapte deze docent halfweg van de Socratische methode af? Na afloop zei hij, dat leerlingen het niet pikken, wanneer je al te lang met zo'n onderwerp bezig blijft. Maar achterin de klas was te merken, dat leerlingen net geïnteresseerd begonnen te raken en werden overvloed door de uitleg.

Natuurlijk werkt een docent vaak onder tijdsdruk en een Socratisch gesprek kan lang duren. Maar het kan een goede tijdsinvestering zijn. In het bovenstaande geval had het inzicht in wat breuken zijn, wat delen

eigenlijk is, met sprongen vooruit kunnen gaan.

Hoe had het gesprek op Socratische wijze kunnen worden voortgezet? De docent had kunnen vragen hoe de leerlingen aan hun antwoorden kwamen, waarom ze dachten dat een bepaald antwoord goed was en met de gegeven antwoorden had hij weer verder kunnen vragen. De klas bepaalt dus deels hoe het gesprek verloopt, maar de docent stuurt ook. Hij haalt belangrijke opmerkingen naar voren, schrijft kernzinnen op.

Het is moeilijk zo'n gesprek al improviserend in goede banen te leiden. Wanneer men van te voren al weet de Socratische dialoog bij een bepaald onderwerp te gaan hanteren, kan het beter voorbereid worden: Welke fouten zijn te verwachten, welke redeneringen, naar welke uitleg kan gestuurd worden? Er zijn vaak verschillende mogelijkheden en welke wending het gesprek in de klas neemt, wordt mede door de antwoorden van de leerlingen bepaald. Het bovenstaande gesprek had zich bijvoorbeeld kunnen ontwikkelen in de richting van de grafiek van $y=320/x$ of in de richting van een tabel of naar het onderzoeken van wat delen eigenlijk is, waarbij het eerder genoemde verband met vermenigvuldigen naar boven zou kunnen komen.

Een Socratisch gesprek zou in het laatste stuk van de les gepland kunnen worden, maar het risico door de bel afgekapte te worden is dan aanwezig. Soms zal in de praktijk net als in het voorbeeld boven op een gegeven moment toch op uitleggen moeten worden overgestapt. Wat zelf gevonden wordt, laat echter meer indruk achter in het hoofd van de leerling.

Eigen producties

Bij deze werkvorm wordt de leerlingen bijvoorbeeld gevraagd zelf opgaven van een bepaalde soort te bedenken. Daarbij moeten ze bovendien nog een onderscheid maken naar de moeilijkheid van de opgaven. Een voorbeeld bij het onderwerp eerstegraads vergelijkingen: *Bedenk eenvoudige en moeilijke vergelijkingen.*

Mogelijke eigen producties van leerlingen hierbij zijn: $2x=8$ en $x-1=4$ als eenvoudige en $2,5x + 109735 = -12987$ voor een moeilijke. Misschien komen sommigen tot vormen als $2x + 6 - 5x = 14 + 3x$ of weet iemand zelfs een ingeklede vergelijking erbij te halen. Het werken met eigen producties wordt bepleit door Treffers (1987). Hij beveelt de werkwijze aan als middel om misconcepties (begripsfouten) op te sporen. Bij de bovengenoemde situatie van de eerstegraads vergelijkingen treffen we misconcepties aan wanneer leerlingen bijvoorbeeld komen met bedachte eenvoudige opgaven als $1+1=$ of $2x+x=$. Er blijkt uit, dat men niet goed weet wat een vergelijking is. Door te vragen naar verschillen in moeilijkheid, bijvoorbeeld eenvoudige, gemiddelde en moeilijke eerstegraads vergelijkingen, wordt de leerling gedwongen het eigen leerproces

te overzien.

We geven nog een tweede voorbeeld, nu bij het onderwerp afbeeldingen. De opgave moet gedacht worden nadat spiegelingen en rotaties behandeld zijn.



Bedenk bij deze figuur een eenvoudige en een moeilijke opgave, de opgave moet over rotaties of spiegelingen gaan.

Een voorbeeld van een eenvoudige vraag is: "Teken het draaicentrum van deze figuur. Van welke orde is het?" Een voorbeeld van een moeilijke vraag is: "Verander de figuur zo, dat er één symmetrie-as is". Een eigen productie als "Teken de twee symmetrie-assen van de figuur" duidt op een misconceptie.

Na de klassikale introductie, waarbij beide besproken werkvormen gebruikt kunnen worden, volgt een periode van groepswork, afgewisseld met klassikale en individuele momenten.

2.3 Samenwerken in heterogene groepen en de rol van de docent

Wanneer leerlingen in rijen van twee zitten of soms ook als de opstelling volgens tafelgroepen is, houdt de onderlinge samenwerking - als deze er al is - vaak niet meer in dan het elkaar af en toe helpen of in tweetallen werken; het maken van opgaven met een heterogene tafelgroep als geheel is dan een nieuw aspect. Men kan niet van de ene op de andere dag op deze vorm over schakelen. We gaan hier niet in op de vraag hoe heterogene groepen het beste geformeerd kunnen worden. Zie daarover bijvoorbeeld SLO (1985). Ook de rol van de school als geheel laten we hier buiten beschouwing.

Voor het samenwerken moeten regels gesteld worden en de leerlingen moeten daarmee leren werken. Regels zijn bijvoorbeeld: *Probeer problemen altijd eerst in de groep op te lossen voor je de leraar erbij haalt en Werk niet in je eentje vooruit, werk gelijk op.*

De rol van de docent bij groepswork is hierbij zeker niet het met eigen werk beginnen en de groepjes aan hun lot overlaten tot er problemen zijn. De rol is veel actiever. De docent moet zicht houden op wat er in de groepjes gebeurt om goed te kunnen reageren. De volgende

aanwijzingen namen we over uit Posthuma de Boer (1986) en Ebbens (1988):

Zorg bij contact met een enkel groepje ook voor overzicht op de rest van de klas. Loop buiten de groepjes om. Kijk regelmatig rond. Houd contact met de klas en met de individuele leerlingen. Zorg dat het basisrundoer niet zo hoog wordt, dat leerlingen moeten gaan schreeuwen (het kan een oorzaak er van zijn dat leerlingen een hekel aan groepswork krijgen). Help niet steeds dezelfde.

Grijp niet te snel in; loop ook eens rond zonder begeleiding te geven en inventariseer wat er gebeurt in de groepjes. Geef aanwijzingen betreffende te maken opdrachten, huiswerk en dergelijke via het bord.

Wanneer de leerlingen aan een opdracht zijn begonnen, maak dan eerst een zogenaamde procesronde om te controleren of iedereen inderdaad aan het werk is. Geef daarbij nog geen inhoudelijke aanwijzingen over de aanpak van de opdracht; wel een verduidelijking, indien nodig.

Na de procesronde volgt een inhoudelijke ronde. Ga bij een vraag van een leerling na waar het probleem precies ligt: is de opdracht wel gelezen? is de vraag begrepen? Zorg dat de tekst gelezen wordt; leg bijvoorbeeld een hand op de tekst en vraag waar de tekst over ging. Vraag om uitleg, als een leerling zegt "Ik snap het niet"; stel de wedervraag "Wat snap je niet?". Probeer een cultuur te kweken van "dat en dat snap ik niet". Probeer uitleg via een leerling te laten lopen. Deze moet dan aan de rest van de groep uitleggen.

Houd tijdens het groepswork niet uitsluitend inhoudelijke rondes, maar las na een aantal inhoudelijke rondes weer een procesronde in. Bekijk dan, wie er aan het werk is en of er veel vingers zijn. Beslis of er klassikaal op een onderdeel moet worden terug gekomen. Ga na wie te weinig gedaan heeft en vraag je af of dat vaker voorkomt. Controleer of er voldoende in de schriften is geschreven bij de discussie. Laat leerlingen merken dat er controle is.

Bij deze aanwijzingen voor groepswork in het algemeen moet de docent natuurlijk uitmaken in hoeverre ze in zijn of haar situatie van toepassing zijn. In het vervolg gaan we nader in op het groepswork zelf en geven we wiskundig inhoudelijke voorbeelden.

2.4 Vormen van groepswork, soorten opgaven

Het is niet de bedoeling dat alle opgaven in nauwe samenwerking binnen de groepen gemaakt worden. Ten eerste moeten de leerlingen uiteindelijk in staat zijn de opgaven (bijvoorbeeld op de eindtoets) zelfstandig te maken en is individuele training dus zeker noodzakelijk.

Ten tweede kunnen problemen soms beter met de klas als geheel worden aangepakt of besproken, bijvoorbeeld uit efficiëntie-overwegingen. Ten derde zal uitsluitend groepswork op den duur vervelen en is een afwisseling met individueel en klassikaal werken derhalve aan te bevelen. Om de leerlingen niet in verwarring te brengen betreffende de werkvorm die bij een bepaalde opgave van hen gevraagd wordt, moet de tekst aanwijzingen daaromtrent bevatten, bij voorkeur in een afwijkend lettertype. Voorbeelden zijn: MET DE GROEP, MET DE KLAS ALS GEHEEL en MAAK IEDER VOOR ZICH.

Hieronder volgt een aantal voorbeelden van samenwerkingsvormen met bijbehorende opgaven. (We pretenderen niet, dat de lijst volledig is.) De voorbeelden verschillen in de mate waarin er moet worden samengewerkt binnen de groep.

Groepswork bij algoritmische opgaven

Diverse manieren om in een groep bijvoorbeeld vergelijkingen (leren) op te lossen zijn het 'in koor' werken, het stapsgewijs gelijk-op werken aan gelijksoortige opgaven en het samen controleren.

Bij het in koor werken worden gezamenlijk de oplossingsstappen van het algoritme uitgevoerd.

Bij het stapsgewijs gelijk-op werken aan gelijksoortige opgaven krijgt elke leerling een andere opgave. De opgaven worden met hetzelfde algoritme opgelost, waarbij de diverse stappen stapsgewijs worden uitgevoerd. Hieronder is een voorbeeld.

MET DE GROEP:

Hier staan enkele vergelijkingen zonder een balans erbij.

Los de vergelijkingen op. Schrijf alle tussentapen in je schrift.

KIES ELK ÉÉN van de vergelijkingen en WERK GELIJK OP:

- de vergelijking opschrijven
- links en rechts de termen met letters evenveel kleiner maken
- links en rechts de getallen evenveel kleiner maken
- de oplossing geven
- de oplossing controleren door te substitueren in de oorspronkelijke vergelijking

(a) $8v + 11 = 6v + 27$ (d) $3 + 10p = 7p + 39$

(b) $5a + 19 = 3a + 32$ (e) $4q + 75 = 9 + 10q$

(c) $13b + 5 = 8b + 15$ (f) $12 + z = 4 + 3z$

Bij het samen controleren worden de opgaven individueel gemaakt, de uitkomsten worden samen besproken.

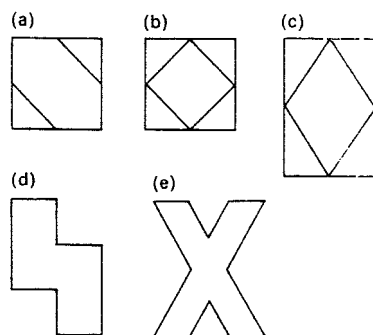
Opgaven met taakverdeling

Een rijtje opdrachten van dezelfde soort wordt binnen de groep verdeeld. De oplossingen worden samen besproken. Ieder komt dus met elke opgave in aanraking, zij het slechts met enkele opgaven wat dieper. Elk moet de oplossing van de eigen opdracht(en) verantwoorden. Hieronder is een voorbeeld.

VERDEEL DE FIGUREN (a) TOT EN MET (e)
IN DE GROEP, NEEM IEDER TWEE.

Neem jouw tekeningen over en teken de
symmetrie-assen (met stippellijnen).

CONTROLEER DAARNA ELKAARS OPLOSSINGEN



Ook indien bijvoorbeeld een aantal punten van een grafiek of een aantal waarden voor een tabel moeten worden bepaald, kan ieder groepslid een deel op zich nemen. Om verder te komen met de groep als geheel moeten vervolgens de resultaten verzameld worden. De samenwerking is dus niet vrijblijvend meer, maar nodig om verder te komen.

De taakverdeling kan ook in de tijd plaatsvinden. Bij het maken van een ingewikkelde meetkundige figuur bijvoorbeeld kunnen de leerlingen om de beurt aan de opgave werken. Om het proces vast te leggen moeten tussenresultaten worden overgenomen. Het eindproduct kan worden bewaard door de tekening aan de muur te hangen. Op de volgende pagina staat een voorbeeld.

MAAK DEZE OPGAVE MET DE GROEP. PER
GROEP ZIJN EEN PAAR GROTE VELLE
ROOSTERPAPIER NODIG.

Leg een vel roosterpapier in het
midden van de groep. Iemand begint
door een stip te

zetten en een
streepje er aan vast.

(Voorbeeld: zie eer-
ste figuur). De vol-
gende leerling zet

er een streepje bij
zo, dat de stip
draaicentrum van de

2e orde wordt. (Zie
tweede figuur).

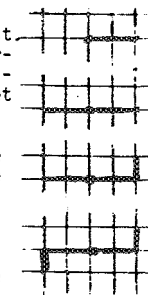
De volgende zet er
een streepje bij
zo, dat er geen

draaicentrum van de
2e orde meer is.
(Voorbeeld: zie derde figuur).

De volgende zorgt dat er weer wel
een draaicentrum van de 2e orde is.
(Zie vierde figuur). Enzovoort.

Telkens als je de groep rond bent,
stop dan en neem allemaal de figuur
over die er dan staat. Zet erbij of

er op dat moment wel of geen draai-
centrum van de 2e orde is.
Ga door tot ieder minstens 2 keer
aan de beurt is geweest.



Opgaven met verschillende oplossingen en oplossingswegen

Verskillende goede uitkomsten van eenzelfde opgave kunnen tot discussie leiden. Hieronder is een voorbeeld. (De leerlingen hebben zojuist onderzocht welke letters een draaicentrum van de tweede orde hebben).

Maak een fantasieletter met een
draaicentrum van de 2e orde. Geef
het centrum aan met een stip.
LAAT DE FANTASIELETTERS AAN ELKAAR ZIEN.

Wanneer verschillende wegen naar hetzelfde antwoord leiden, kunnen die verschillende methoden vergeleken worden. Hieronder is een voorbeeld.

Teken een assenstelsel en daarin
de punten $(1,2)$, $(-2,2)$, $(-3,-1)$,
 $(2,-2)$ en $(3,0)$.
Wat zijn de beeldpunten bij
spiegeling in de y-as?

(Bij bovenstaande opgave kunnen de gevraagde beeldpunten bepaald worden door de coördinaten te veranderen, $(1,2)$ wordt dan $(-1,2)$, of door hokjes te tellen naar en vanaf de x-as, de beeldpunten te tekenen en tenslotte de coördinaten af te lezen.)

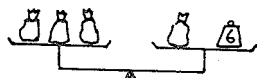
Verschillende oplossingsmethoden kunnen ook worden verplicht. Bij het bestaan van gelijkwaardige oplossingsmethoden is het mogelijk binnen de groep verschillende methoden aan verschillende leerlingen te koppelen. Bij een volgende opgave kunnen de rollen gewisseld worden. Hieronder is een voorbeeld.

MET DE GROEP:

- Bekijk de vergelijking $2n+7=5n-8$.
 (a) Welke eerste stappen zijn mogelijk?
 (b) Los de vergelijking op, maar neem niet allemaal dezelfde eerste stap.
 (c) Vertel de oplossingen en vertel wat je gedaan hebt.

Speciale vermelding verdient het type opgave waarbij de mogelijke oplossingswijzen van niveau verschillen. Hieronder is een voorbeeld.

De balans hieronder is in evenwicht. De zakken zijn even zwaar. Hoeveel weegt één zak?



(Een dergelijke opgave kan proberenderwijs vanuit de tekening opgelost worden, redenerend met woorden of met behulp van een meer of minder formele vergelijking: $3z = z + 6$ of $? + ? + ? = ? + 6$.)

Gelijkvormige problemen

Een vorm hiervan hebben we reeds gezien bij het stapsgewijs gelijk-op werken aan gelijksoortige opgaven. Een andere vorm is het werken aan opdrachten met variatie van een gegeven: Elke leerling moet een element zelf inbrengen, bij de gegevens van de opgave, waardoor gelijksoortige opgaven met kleine verschillen ontstaan. Vervolgens worden de opgaven door de leerlingen individueel uitgewerkt. Na afloop worden de resultaten door de groep gecontroleerd. Hieronder is een voorbeeld.

DOE EERST IEDER VOOR ZICH.

- (b) Neem de figuur hiernaast over op roosterpapier.



Teken op je eigen figuur een stip C.
 (niet allemaal op dezelfde plek.)
 Verander nu je figuur zo, dat C het draaicentrum van de 2e orde wordt.
 LAAT ELKAAR DE FIGUREN ZIEN.

Reflectie-vragen

Na enige praktische opdrachten kan een vraag gesteld worden die van een iets hoger abstractie-niveau is, een gevolgde werkwijze ter discussie stelt of een relatie met een ander onderwerp legt. De groepsdiscussie wordt zonodig door middel van een klasgesprek uitgewerkt. Hieronder volgt bij elk van de drie een voorbeeld.

Aan de eerste vraag, een vraag met een hoger abstractie-niveau, is de bepaling van de kleinste draaihoek bij figuren met draai-symmetrie van verschillende orde voorafgegaan.

BESPREEK MET DE GROEP: Wat is de kleinste draaihoek bij een figuur met draaicentrum van de n-de orde?
 (n mag 2, 3, 4, enzovoort zijn)

De tweede vraag stelt een werkwijze ter discussie:

MET DE KLAS ALS GEHEEL:

- . Wat is het nut van controleren door substitutie? Hoe doe je het op de slimste manier?
- . Controleren door substitutie biedt geen garantie van 100%; wat kan er mis gaan?

De derde vraag legt een relatie tussen verschillende onderwerpen:

BESPREEK MET DE GROEP:

Waarom leer je vormen vereenvoudigen in het hoofdstuk over vergelijkingen?
 Wat heeft het met elkaar te maken?

Context-opgaven

Mits aan bepaalde voorwaarden is voldaan, zijn context-opgaven bij uitstek geschikt voor het werken in groepen. De context motiveert indien zij voor alle leerlingen bekend en interessant is. De hoeveelheid tekst moet niet zo groot zijn, dat ze door de leerlingen niet geheel gelezen wordt (en dat kan al snel het geval zijn). Ook is belangrijk, dat het verhaal de wiskundige kern niet aan het oog onttrekt. Op de volgende pagina is een voorbeeld; de context is de supermarkt, het wiskundige onderwerp de introductie van algebraïsche vormen. Aan de groepsopdracht gaat een klassikaal gedeelte vooraf dat voor de duidelijkheid ook grotendeels is weergegeven.

1 MET DE HELE KLAS:



2

Elke week rekent de chef zijn voorraad op dezelfde manier uit:

Hij schrijft het aantal op dat hij aan het begin van de week had

700

Hij telt het aantal waarmee is aangevuld erbij

+ 200

Hij trekt het aantal dat verkocht is eraf

- 400

De aantallen veranderen van week tot week. Ze zijn veranderlijk of **variabel**. Toch voert de chef elke week dezelfde soort berekening uit. In plaats van de variabele aantallen kunnen we **letters** gebruiken.

b staat in plaats van het aantal aan het begin van een week.

b

a staat in plaats van het aantal waarmee is aangevuld.

a

Een tweede voorbeeld is geënt op het werken met SLO-materiaal. De context uit het SLO-pakket Grafieken en Verbanden behandelt het (niet bij naam genoemde) kwadratisch verband tussen dikte van vissnoer en de maximale trekkracht. De observatie werd gedaan in het kader van het project Interne Differentiatie 12-16, voorloper van AGO 12-16 en nader beschreven in paragraaf 4.3.

In een supermarkt worden elke week de voorraden gecontroleerd.

- (a) In het begin van de week waren er 700 blikjes Fizi-Cola in voorraad. In de loop van de week werd de voorraad met 200 blikjes aangevuld. Er werden 400 blikjes verkocht. Hoeveel blikjes waren er aan het eind van de week in de supermarkt?
- (b) Tijdens een warme zomerweek was de voorraad aan het begin 3800 blikjes. De voorraad werd in de loop van de week met 1200 blikjes aangevuld en er werden 1700 blikjes verkocht. Hoeveel blikjes waren er aan het eind van die week?

v staat in plaats van het aantal dat verkocht is.

✓

De chef maakt de berekening $b + a - v$.

Een berekening waarbij je aantallen vervangt door letters noemen we een **algebraïsche vorm**. De vorm $b + a - v$ stelt het aantal blikjes aan het eind van de week voor.

LEES EN BEANTWOORD DE VRAGEN MET DE GROEP

Karin, de oudere zus van Katja, werkt ook in de supermarkt. Ze helpt met de berekening van de voorraad elke week. De eerste keer kreeg ze ruzie met de chef, want ze wilde het op een andere manier doen: Ze begon met het aantal aan het begin van de week (700), dan trok ze het verkochte aantal af (400) en tenslotte telde ze het aantal waarmee was aangevuld er bij op (200).

- (a) Wat doet Karin anders dan haar chef? Laat dat zien met een algebraïsche vorm.
- (b) Wie heeft gelijk, Karin of de chef?

De docent van een heterogene brugklas van een brede scholengemeenschap begon de les met een klassikale introductie, waarbij de kernbegrippen (dikte vissnoer, gewicht van vis) naar voren gehaald worden. De volgende passage laat zien dat er een motiverende werking uitgaat van contextgebruik (Herfs, 1985).

De docent (L. in het lesverslag) start klassikaal. Hij vraagt aan Marcel om de titel hardop voor te lezen.

Marcel: "Uitvissen" (met de klemtoon op de laatste lettergrepen).

L: "Als ik het zo lees, zoals jij zegt: uitvissen, dan betekent het ...?"

Marcel: "Dat die gaat vissen".

L: "Ja dat die gaat vissen. Maar, hoe zou het ook kunnen?"

Jongen: "Uitvissen" (met de klemtoon op de eerste lettergreep).

L: "Ja, uitvissen. Dan bedoel je ...?"

Jongen: "Nou, uitzoeken."

L: "Ja, Dat je iets gaat uitzoeken. Het gaat over uitvissen, dus over vissen, maar ook uitvissen in de zin dat je iets gaat uitzoeken."

Berdien: "Waarom zetten ze dan niet neer: uitzoeken?"

L: "Omdat het over vissen gaat en dat is het wel leuk om het uitvissen te noemen. Saskia, wil jij het bovenste gedeelte eens lezen?"

Wij lezen ondertussen mee."

"Ik heb iemand een vis zien vangen van wel 40 kilo" roept Gemma als ze thuis komt.

"Dat kan toch niet joh, daar heb je een paal met een dikke kabel voor nodig om die vis uit het water te hijsen" antwoordt vader ongelovig.

"Nee hoor" zegt Gemma, "wat voor hengel het was weet ik niet, maar het was een snoertje van maar 1 mm dikte. Dat riepen ze tenminste."

Vader gelooft er niets van. "Volgens mij kan dat niet. Dan zal die vis wel heel wat minder dan 40 kilo hebben gewogen. Dat overdrijven ze natuurlijk. Ik denk dat dat bij de afdeling sterke verhalen thuis hoort."

Gemma begint wel een beetje te twijfelen. Zou het dan toch niet waar zijn? Maar zij had zelf gezien dat het een heel dun draadje was geweest waar die vis aan hing. En ze waren met z'n tweeën in de weer geweest om die grote vis uit het water te trekken. "40 kilo" hadden ze geroepen, "aan een draadje van 1 millimeter". Misschien had zij dat laatste toch niet goed verstaan.

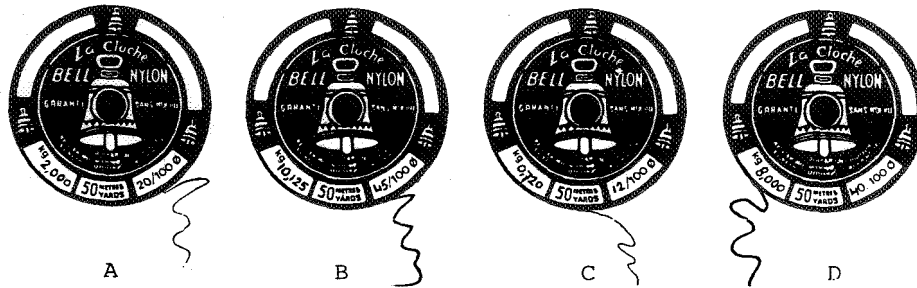
Wat denken jullie, zou Gemma gelijk hebben of niet?

Gemma laat het er (nog) niet bij zitten.

We zullen eens volgen wat Gemma gaat doen. En, van zelf, doen jullie ook mee.

"Wat voor soorten vissnoeren zijn er zoal? Hoe dik zijn die en hoeveel kan daar aanhangen?" vraagt Gemma zich af.
Zij stapt de AVWU, een grootwinkelbedrijf, binnen, want daar verkopen ze allerlei visartikelen.

Ze hebben vier soorten vissnoeren. Dit zijn de etiketjes.



Kijk eens naar het etiketje op klosje B. Daar staan een paar gegevens op over het soort snoer dat op dat klosje zit.
"kg 10,125" betekent dat dit snoer breekt als je er iets aan hangt dat meer dan 10 kg plus 125 gram weegt.
"45/100 ϕ " betekent dat de dikte van het snoer $\frac{45}{100}$ mm is. Het teken ' ϕ ' wordt bij technische zaken vaak gebruikt als afkorting voor het begrip 'diameter'.

Als Saskia de tekst gelezen heeft, probeert de docent het gewicht van de vis (40 kilo) voorstelbaar te maken voor zijn leerlingen.

L: "Vertel eens even, 40 kilo; hoeveel is dat?"

Rob: "80 pond."

L: "Nee, in ponden praten we niet."

Meisje: "Heel zwaar."

Berdiën: "40 kilo, dat is net zo zwaar als mij."

L: "Aha, 40 kilo, zegt Berdiën. Dat is net zo zwaar als zij is. Wie weegt er hier rond de 40 kilo?"

Het merendeel van de leerlingen schommelt rond dit gewicht.

Tasja: "Ohh, ikke weeg meer."

L: "40 kilo is - even luisteren - ongeveer het gewicht van een kind uit de 6e klas."

Berdiën: "Mijn zusje is ook al 40 kilo."

L: "Dus dat was niet een visje, waar het (verhaal) over gaat. Maar dat was een behoorlijke vis van 40 kilo. En het snoertje was 1 mm dik."

De docent vervolgt het klasgesprek. De kernbegrippen (40 kilogram en een snoertje van 1 mm dikte) worden steeds weer naar voren gehaald.

De meeste leerlingen geloven niet dat aan een snoer van 1 mm dikte een vis van 40 kilo kan hangen. Een groepje jongens, waaronder de juniorenkampioen vissen uit Deventer, sluit echter niet uit dat dat zou kunnen.

Berdiën: "Uhh. Dat kan helemaal niet."

L: "Lees nog even door, Saskia?"

Saskia: "Gemma begint wel een beetje te twifelen. Zou het dan toch niet waar zijn? Maar zij had zelf gezien dat het een heel dun draadje was geweest waar die vis aan hing. En ze waren met z'n tweeën in de weer geweest om die grote vis uit het water te trekken. "40 kilo" hadden ze geroepen, "aan een draadje van 1 millimeter." Misschien had zij dat laatste toch niet goed verstaan.

Wat denken jullie, zou Gemma gelijk hebben of niet?"

L: "De vraag is dus: kan je een vis van 40 kilo vangen met een snoer van 1 millimeter dikte ..."

"Nee, dat kan niet", onderbreekt een aantal leerlingen de docent.

L: "... zonder dat het snoer breekt?"

Een paar jongens denken dat dat inderdaad kan.

Marcel: "Je kunt hem wel vangen, maar je kunt hem er niet uittrekken."

L: "Hij wil wat zeggen?"

Marcel: "Je kunt hem wel vangen. Dat heb je bij heel veel sportvissers, die vissen. Die halen hem niet direct uit het water, maar die halen hem eerst naar de kant en dan met zo'n schepnetje halen ze hem omhoog."

Meisje: "Eerst uit laten zwemmen."

L: "Maar die vis van 40 kilo, die blijft dus 40 kilo en die is ook heel sterk en die zal er dus ook wel met 40 kilo aan trekken. Die laat zich hangen. Nou, wat denk je. Zou het nou kunnen?"

De meesten denken dat het niet kan.

Het jongensgroepje rechtsachter in de klas begint te twifelen.

L: "Edwin?"

Edwin: "Ja, als je aan zo'n draadje hangt, dan denk ik niet dat dat draadje het houdt."

L: "Maar jij zegt niet: het kan helemaal niet? Want hij heeft in de gaten dat die snoertjes nogal sterk zijn."

Marcel: "Ja, maar in het water is het meestal lichter."

L: "Ja, maar zij (= Gemma) zegt dus dat zij hem op het laatst er uithaalden. Dus toen hing hij even aan de draad."

Berdiën en Colette: "Dat houdt die niet."

L: "Wie denkt dat het wel kan?"

Niemand in de klas is er stellig van overtuigd dat het wel kan. Als geen enkele leerling reageert op de vraag, zegt Berdiën: "Marcel."

Marcel denkt dat het wel kan.

L: "Wacht effe. Marcel en Henrike mogen het zeggen. Henrike?"

Henrike: "Ik dacht dat het misschien wel kan, maar ligt het eraan hoe sterk de hengel is?"

L: "Nee, het gaat om het snoer. De hengel is sterk genoeg. En jij?" (= Marcel).

Marcel: "Nou op 8/100 daar gaat een normale voorn al doorheen. Ik denk dat ze zo'n beetje 55/100 ..."

L: "Oh, wacht even. Hij weet er iets van ..."

Marcel: "Ik ben Deventer kampioen."

"Ja hoor, hij wel", zegt een stel meisjes ongelovig.

L: "Daar krijgen we het straks over, 8/100 ..."

Marcel: "Ja hoor, dat geloof je niet, he?"

L: "Dan moet jij (= Marcel) heel goed je best doen met deze opgave. Want dit is een hele leuke opgave om erachter te komen of het nou wel of niet kon."

Marcel: "Mijn vader vist ook veel. En die doet ook aan wedstrijden mee. We gingen eens karpers vissen in een vijver. En toen was er een jongen die haalde er ook zo'n hele grote uit. Ik geloof wel 25 kilo. Die kreeg die er wel uit, maar wel met veel moeite."

De eigen ervaringen van de leerlingen worden volop aangewend om de situatie te verlevendigen. Dat geldt ook voor de leerlingen die nog nooit gevestigd hebben, want alle leerlingen wordt in contact gebracht met een echt vissnoer. De docent heeft namelijk een klosje vissnoer meegenomen en laat dat door de klas circuleren. Het etiket ontbreekt op het klosje, zodat de dikte van het snoer onbekend is. Mijn groepje [lees: het groepje, waarin de observator zit] probeert tevergeefs de dikte te meten met behulp van een lineaal.

De docent weet ook niet wat de dikte is. In ieder geval is het minder dan één millimeter dik.

L: "....wat het wel is kan ik je niet zeggen, want ik ben het etiket kwijt. Maar we gaan even dit nog doen (een stoel van plusminus 3 kg optrekken aan het snoertje). Want het zegt niet zoveel of het dik of dun is. Ik wil even weten wat er aan kan hangen."

Marcel: "Ik denk 35/100 ..."

L: "Als die 35/100 is, dan ...?"

Marcel: "... dan houdt die 't wel."

L: "Dan knapt die niet."

Jongen: "Meester, tilt U aan twee draden?"

L: "Ja, maar hij is zo dun, dat je dat achteraan niet ziet. Nou daar gaat die ..."

De draad knapt bijna onmiddellijk.

Jongen: "D'r zit geen speling meer in."

L: (verwonderd) "Hé? Nee, jammer hè? Kijk, ik krijg hem omhoog en ..."

Marcel: "Maar die onderkant van die stoel is scherp."

Meisje: (ongelovig) "En dan zeker 40 kilo! Ja... ." (vergeet 't maar).

L: "Die onderkant van die stoel is ook scherp... ."

Jongen: "En normaal zit er speling op het snoer."

L: "We proberen het nog één keer."

Maar de draad knapt weer.

L: "Het beste wat die deed, was aan een poot. Maar op het moment dat je hem op wilt tillen, gaat die stuk. Zo'n stoel is een kilo of vier."

Berdiën: "Dus niet bij 40 kilo."

L: "We snappen ook dat als je een dikker snoertje neemt, dan kan er meer aan. En je bent er natuurlijk ook wel achter, dat het erom gaat om iets over snoertjes uit te zoeken."

De klas hangt als het ware aan de lippen van de docent tijdens deze proef. Dat de proef niet echt lukt lijkt bijzaak te zijn. De introductie is in ieder geval wel geslaagd.

Vervolgens bespreekt de docent de betekenis van de aanduidingen op de etikettes (dikte van het snoer en de daarmee corresponderende maximale trekkracht), waarna de leerlingen in groepjes aan de volgende opdracht beginnen.

Een andere werkvorm die zeer motiverend kan werken is de spelvorm.

Spelvorm

Het werken met een groep biedt de mogelijkheid bepaalde opgaven in spelvorm te doen. Ook hier biedt het groepswerk mogelijkheden, die er bij individueel werken niet zijn. Met wat fantasie kunnen allerlei (varianties van) bekende gezelschapsspelen worden gebruikt. Het spel moet echter niet te veel tijd nemen. De spelregels mogen niet te ingewikkeld zijn en - net als bij contextopgaven - moet de wiskundige kern zichtbaar zijn.

2.5 Huiswerk tijdens de gemeenschappelijke fase

Het geven van huiswerk neemt op de meeste scholen een vanzelfsprekende plaats in. Deze plaats is binnen het AGO-model niet vanzelfsprekend. Wil men echter de traditie handhaven uit angst dat anders bijvoorbeeld het tempo omlaag gaat of wanneer men het belangrijk vindt dat er buiten schooltijd ook gewerkt wordt, dan kan deze werkvorm worden ingepast op de volgende wijze:

Leerlingen, waarvan men vindt dat ze extra oefening nodig hebben,

kunnen een extra serie oefenopdrachten meekrijgen. Leerlingen die graag ook thuis werken, hoewel ze geen achterstand hebben, krijgen opgaven over een onderwerp, dat ver ligt van wat men op dat moment in de klas aan het doen is, zo mogelijk zelfs iets dat buiten het leerplan valt. Voorbeelden zijn (in de tweede klas) een inleiding in de topologie of in de binaire getallen. Dit om te voorkomen, dat het tempo binnen de klas uiteen gaat lopen.

In de opsomming van verschillende soorten werkvormen met illustrerende opgaven in de vorige paragraaf kwamen meer en minder groepsgerichte opdrachten voor. Individueel gerichte opgaven en groepsopgaven, die met een kleine aanpassing ook door leerlingen apart kunnen worden gemaakt, zijn geschikt voor huiswerk, wanneer een aantal leerlingen is achter geraakt. Opgaven, die sterk op groepen zijn gericht, zijn voor huiswerk niet geschikt. Bij een dergelijke selectie voor huiswerk moet er voor worden gewaakt dat de opbouw door volgorde verandering niet ernstig verstoord wordt. Tenslotte is het mogelijk opdrachten mee te geven, die meer in de herhalende, consoliderende sfeer liggen: de opdracht te controleren of de hoofdzaken van een klassediscussie goed in het schrift staan en deze zonodig aan te vullen, de opdracht een formule uit het hoofd te leren of een gemaakt vraagstuk nog eens te proberen.

Deze wijze van huiswerk geven vereist wel, dat de docent mogelijke huiswerkopgaven vooraf bekijkt en op geschiktheid (om alleen te maken) beoordeelt. In de les moet het huiswerk niet op het laatste moment worden opgegeven en zo nodig moeten opgaven van extra aanwijzingen worden voorzien.

3. DIAGNOSTISCHE TOETS EN DAARNA

3.1 Diagnostische toets

Het toetsmoment na de kern dient ervoor na te gaan hoe ver elke individuele leerling gekomen is en om te controleren of alle leerlingen de gemeenschappelijke leerdoelen gehaald hebben. Voor hen, waarvoor dat niet geldt, moet een extra inspanning volgen. Ook bij de betere leerlingen kan nog een enkel kennishiaat blijken. Om zo goed mogelijk feedback te kunnen geven aan alle leerlingen en verantwoord remediërend op te kunnen treden, zou het nodig zijn het werk van alle leerlingen grondig te bekijken. Dus niet slechts de antwoorden nakijken en zeker niet het nakijkwerk aan de leerlingen uitbesteden met behulp van een antwoordenlijst. In de praktijk is het voornaamste argument voor een dergelijke werkwijze, dat het anders de docent veel te veel tijd zou kosten. Een tussenoplossing is de volgende:

De toets wordt ingeleid met een klein aantal korte vragen die aan het begin in korte tijd moeten worden beantwoord en ingeleverd. Ze kunnen nog tijdens de les door de leraar worden nagekeken. De vraagstukjes hoeven alleen op antwoord te worden gescoord en ze zullen door hun eenvoud door de meeste leerlingen worden goedgemaakt. Wanneer iemand echter al in deze vragen fouten maakt, dan zal de rest van de toets ook niet best gemaakt worden, daar de overige toetsopgaven moeilijker zijn. Van deze leerlingen (enkel per klas) wordt de rest van de toets door de leraar na de les nagekeken en niet alleen op antwoord: ook het soort fouten wordt bestudeerd. Deze kennis wordt dan later in de klas gebruikt bij het geven van de remediële hulp aan die zwakke leerlingen.

De nabespreking van de toets zou de volgende vorm kunnen hebben: voor de gehele klas worden de antwoorden opgelezen (van de leerlingen die de eerste serie vragen goed hadden is het werk immers nog niet gezien). Telkens wordt gevraagd wie het goed had en bij een te klein aantal goede antwoorden wordt de opgave klassikaal besproken. Daarna wordt de klas ingedeeld op grond van de toetsresultaten: het begin van de fase met gescheiden leerwegen, het onderwerp van de volgende paragraaf.

3.2 Gescheiden leerwegen

Op grond van de toetsresultaten vormen de zwakste scoorders een aparte groep. Het is de bedoeling binnen die homogene groep, gebruikmakend van de gegevens van de D-toets, de zwakke punten van de betreffende leerlingen verder op te sporen en zoveel mogelijk weg te werken. Een manier om verder naarboven te halen wat er bij de

leerlingen verkeerd zit, is ze zelf vraagstukken, zo mogelijk van verschillende moeilijkheidsgraad, te laten bedenken (eigen producties) en ook hier past weer de Socratische dialoog. Binnen de beperkte tijd van 1 tot 2 lessen zal de docent ook duidelijk moeten aangeven hoe het wel moet en begrippen en definities nauwkeurig moeten herhalen.

De betere leerlingen moeten in die fase zelfstandig werken, daar zij geen beroep op de leerkracht kunnen doen. De leerkracht begeleidt namelijk de zwakke leerlingen. Deze betere leerlingen hebben wel steun aan elkaar. Het leerlingmateriaal moet zo geordend zijn, dat in de periode van het zelfstandig werken bij hen stof aan de orde is die weinig of geen vragen oproept. Zo moeten bijvoorbeeld opdrachten die het lezen van lange stukken tekst vereisen, vermeden worden. Op die plaatsen, waar toch problemen verwacht kunnen worden, moet de mogelijkheid geboden worden om hints te raadplegen. Bij de betreffende opgave kan bijvoorbeeld met een speciaal teken worden aangegeven, dat er elders in het boek, bijvoorbeeld achteraan het hoofdstuk, een hint te vinden is. Een hint is een korte aanwijzing of opdracht die de leerling kan verder helpen. Dergelijke aanwijzingen moeten kort en helder zijn, aangezien ze anders zelf weer vragen kunnen oproepen. Hieronder is een voorbeeld. (Links de opgaven en rechts de hints die achterin het hoofdstuk staan).

⁵
 $p = 4$, $q = 2$, $r = 5$ en $s = 1$. Bereken:

(a) $pqr + s$ [hint]

(c) $p + r^2$

(b) $qr - ps$ [hint]

(d) $pq + qr + rs$

[bij 5a] $pqr + s = (4 \times 2 \times 5) + \dots$
Nu terug naar opgave 5a.

[bij 5b] $qr - ps = (2 \times 5) - (\dots)$
Nu terug naar opgave 5b.

let op: haakjes!

Behalve het gebruiken van hints is er tenslotte ook nog de mogelijkheid het antwoordenboekje te raadplegen. Door al deze maatregelen is de kans op onopgeloste problemen bij de betere leerlingen zo klein mogelijk gemaakt.

Na 1 à 2 lessen gaan de leerlingen weer allen in de oorspronkelijke groepjes zitten. In de resterende tijd wordt door de leerlingen aan opdrachten op verschillende niveaus gewerkt. De leerlingen die uit de homogene groep afkomstig zijn krijgen voor zover nodig herhalingsopdrachten en eventueel alternatieve benaderingen van het onderwerp van de gemeenschappelijke leerstof. De anderen gaan verder met verrijkend of verdiepend materiaal. Ook nu hoeft er niet geheel individueel gewerkt worden. Problemen van een bepaalde leerling moeten bij voorkeur eerst binnen de groep besproken worden. Pas als dat geen resultaat heeft opgeleverd, mag een beroep op de docent worden gedaan. De werkwijze ligt tussen het groepswork van de gemeenschappelijke fase en individueel werken in.

3.3 Afsluitend klasgesprek

De cyclus wordt afgesloten met een klassikaal gesprek waarin de stof van het gehele hoofdstuk de revue passeert. Daarbij moet de nadruk liggen op de stof die gemeenschappelijk is, maar daarnaast moet er ook enige rapportage plaatsvinden van leerlingen die na de D-toets verschillende dingen gedaan hebben. Zo komen alle leerlingen met alle stof in aanraking. Dit moet echter niet te diep gaan. De hoofdzaken worden herhaald, waarbij verbanden worden gelegd tussen verschillende onderdelen binnen het hoofdstuk en de docent ook lijnen doortrekt naar onderwerpen die later aan de orde zullen komen. Een mogelijke structuur voor zo'n afsluitend gesprek is hieronder aangegeven. Daarbij is gebruik gemaakt van de werkvorm van eigen producties. De betreffende leerstof gaat over eerstegraads vergelijkingen in het algemeen en gelijkwaardige vormen in het bijzonder.

Op het bord wordt door de leraar met hulp van de klas een schema gemaakt; de leerlingen nemen het in hun schriften over. In de eerste kolom komen de namen van soorten opdrachten die zijn gemaakt; in de tweede kolom voorbeelden van sommen (minstens een eenvoudige en een moeilijke), in de derde kolom zaken waar speciaal op gelet moet worden bij het maken van dergelijke sommen. Hieronder als voorbeeld een stukje van het schema bij een hoofdstuk over vergelijkingen (zie ook bij de opgave over de supermarkt in paragraaf 2.4):

Wat heb je gedaan?	Voorbeelden (eenvoudig en moeilijk)	Waar moet je op letten?
algebr. vormen maken bij verhaal-tjes	Begin van de week waren er 600 flessen; er werden er 400 verkocht. Maak een algebraïsche vorm, waarmee je kunt uitrekenen hoeveel flessen er aan het eind van de week over waren. Mark had wat geld en kocht ijs; daarna betaalde hij de bus; toen hij een paar munten vond, gaf hij iets aan de orgelman. Maak een algebraïsche vorm, waarmee je kunt uitrekenen hoeveel geld Mark overhield op het eind.	De volgorde mag veranderd worden Meer antwoorden zijn mogelijk
gelijkwaardige vormen maken	$p+q+r=$ $p+3q-27-6c=$	Bij het herschrijven moet het bewerkingssteken worden meegenomen

4. ACHTERGRONDEN

In dit hoofdstuk worden de ideeën achter de opgaven en werkvormen toegelicht vanuit achtereenvolgens de wiskundendidactiek, cognitieve theorieën en de resultaten van het project Interne Differentiatie.

4.1 Wiskundendidactiek

In deze paragraaf zal eerst worden ingegaan op het gebruik van open opgaven - open naar antwoord en/of naar oplossingsmethode - bij groepswerk.

Discussie over opgaven, niveaus

Het discussieren over opgaven bij groeps- of klassikaal werk om het inzicht te vergroten, neemt een belangrijke plaats in in het AGO-model. Juist bij open problemen biedt de variatie aan antwoorden stof om over te praten. Dat is ook het geval, wanneer hetzelfde antwoord via verschillende wegen gevonden is, met name wanneer die oplossingsmethoden van niveau verschillen. De docent moet steeds alert zijn op het signaleren en expliciteren van die verschillen. Treden ze niet binnen groepen maar tussen groepen op, dan is een klasgesprek geboden. In de antwoordenlijst of eerder nog in de handleiding voor de leerkracht moet bij de betreffende opgaven zijn aangegeven welke oplossingen en oplossingsmethoden mogelijk of te verwachten zijn. Indien de antwoordenlijst door de leerlingen wordt gebruikt, moeten deze beschrijvingen natuurlijk kort zijn om het voor de leerlingen leesbaar te houden.

Het gebruik in heterogene groepen van problemen die op verschillend niveau kunnen worden aangepakt, wordt aanbevolen door Freudenthal (1980). Wanneer de leerling, die het lagere niveau gebruikte, wordt geconfronteerd met de oplossingsmethode van de leerling die werkte op het hogere niveau, kan dit voor beiden heilzaam werken. De leerling van het lagere niveau wordt geholpen door de kennismaking met de snellere, algemenere methode die hij niet of nog onvoldoende beheerst. De leerling van het hogere niveau ziet bij de ander de methode die hij zelf vroeger waarschijnlijk ook gebruikte. Dit stimuleert reflectie over het eigen ontwikkelingsproces. Bovendien leert zo'n leerling ervan om oplossingen van een hoger niveau uit te leggen.

Van Hiele, die uitgebreid onderzoek verrichtte naar niveaus in het wiskunde leren, acht het gebruik van opgaven op een dergelijke wijze in heterogene groepen goed mogelijk. Wel stelt hij, dat de opgaven aan hoge eisen moeten voldoen: niet alleen moeten ze op verschillend niveau oplosbaar zijn, maar de oplossing van het lagere niveau moet ook voldoende kwaliteit hebben om als oplossing te fungeren (Van Hiele, 1986).

Ook voor opgaven met een meer gesloten karakter werden diverse werkvormen voorgesteld. Op die werkvormen zal in het volgende verder worden ingegaan.

Van samen werken naar individueel werken

Bij het oefenen van een algoritme, bijvoorbeeld het oplossen van een eerstegraads vergelijking, kan een overgang in werkvorm gehanteerd worden van samen doen naar alleen doen.

Begonnen kan worden met het in koor oplossen, waarbij de groep gezamenlijk dezelfde opgave maakt.

Een tussenvorm is het stapsgewijs gelijk-op werken aan verschillende opgaven van hetzelfde type. Dit richt de aandacht op de oplossingsstappen. Bij bijvoorbeeld de vergelijkingen $3x + 6 - 2x = 8$ en $5x + 2 + 6x = -4$ hebben de leerlingen steun aan elkaar bij de keuze van elke stap; voor het werken met de concrete getallen zijn ze meer op zichzelf aangewezen. Wanneer de leerlingen met elkaar over de opgaven praten, worden ze tot een zekere mate van abstractie gedwongen. Zo kan er niet meer gezegd worden: "Nu moet je $3x$ en $-2x$ samen nemen", maar "Je moet de termen met x samen nemen." De ander heeft immers geen $3x$ en $-2x$, maar $5x$ en $6x$.

In de eindvorm maken de leerlingen de opgaven zelfstandig, waarna de uitwerkingen nog gezamenlijk gecontroleerd kunnen worden.

Werken aan gelijkvormige problemen

Hierboven spraken we reeds van het stapsgewijs afwerken van een algoritme bij gelijksoortige problemen. Een andere vorm zien we bij de opdrachten met variatie van een gegeven (2.4), waarbij de gelijksoortige problemen deels door de leerlingen zelf geconstrueerd worden. In de literatuur wordt in dit verband gesproken over het werken aan zogenaamde isomorfe problemen. Volgens Lesh (1981) komen bij de gemeenschappelijke controle de relaties tussen de problemen naar voren. Door onderzoek naar die relaties kan het conceptueel model ontdekt worden, dat de opgaven gemeenschappelijk hebben. Er kan zoals bij Lesh worden gestart met pasklare isomorfe problemen, maar de problemen kunnen ook deels door de leerlingen worden geconstrueerd.

Opgaven met taakverdeling

Bij een aantal opgaven is er sprake van taakverdeling, maar slechts in een ongespecialiseerde vorm, namelijk zo dat ieder een deel van een gevraagde serie gelijksoortige handelingen uitvoert om tot een gezamenlijk resultaat te komen, zoals een tabel of een vectorsom. Van specialisatie bij taakverdeling is afgezien: er bestaat dan het risico, dat de zwakste leerling slechts het domme werk krijgt toegewezen, hetgeen het inzicht in

het totaalprobleem niet verhoogt.

Na deze opmerkingen bij diverse vormen van groepswork zal nog kort worden stilgestaan bij de workvormen Socratisch gesprek, eigen producties, hints en huiswerk.

Socratisch gesprek en eigen producties

De workvormen van het onderwijsleergesprek en de eigen producties spelen op diverse plaatsen in de AGO-cyclus een belangrijke rol. Ze werden in de eerste paragraaf reeds besproken. Toegevoegd kan worden, dat het Socratisch gesprek bijna zo oud is als de wiskunde zelf. Tegenwoordig wordt er meer nadruk gelegd op de inbreng van de leerling dan in de oorspronkelijke vorm: in het gesprek van Socrates met de slaaf hield de bijdrage van de laatste niet veel meer in dan het geven van ja-en-nee-antwoorden. Zie verder bijvoorbeeld Posthuma de Boer (1987).

De eigen producties zijn zowel te gebruiken bij de klassikale introductie en bij het werken met de homogene groep, met het doel (voor-)kennis en vaardigheden te controleren, als bij het afsluitend klasgesprek en dan vooral om leerlingen het eigen leerproces te laten overzien; ook bij het groepswork kunnen leerlingen voor elkaar opgaven bedenken.

Hints

Het formuleren van effectieve hulpaanwijzingen is niet altijd eenvoudig. Groen en Perrenet (1987) pleiten voor concrete, positief geformuleerde aanwijzingen, die gewenste handelingen oproepen. Dat betekent bijvoorbeeld, dat de leerling niet (alleen) meegedeeld moet worden wat niet te doen, maar vooral gericht moet worden op wat wel te doen.

Huiswerk

Uit de opmerkingen over huiswerk in paragraaf 2.5 kon reeds worden afgeleid, dat bij het AGO-model ook aan een invulling zonder huiswerk in de gemeenschappelijke fase is gedacht. De tijd die normaal in de les aan bespreking van huiswerk wordt besteed, kan dan anders worden ingevuld. Onderzoek heeft namelijk nog niet duidelijk aangetoond, dat het op de gebruikelijke wijze met (wiskunde-)huiswerk omgaan betere leerresultaten geeft dan het weglaten ervan (Smit, H.J. en A. Verwey, 1983).

4.2. Cognitieve theorieën over leren en onderwijzen

Theoretische achtergronden van het AGO model betreffen theorieën

over leren in coöperatieve groepen en over individuele verschillen.

Daarbij staat een procesgerichte, cognitieve benadering centraal. De leerling wordt gezien als een actieve, zelfverantwoordelijke informatie-verwerker.

Uiteindelijk gaat het om de ontwikkeling van het leervermogen van alle leerlingen. Dat leervermogen betreft het kunnen hanteren van begrippen en oplossingsstrategieën binnen bepaalde kennisgebieden zoals wiskunde.

Oppervlakte en diepte

Een belangrijk onderscheid tussen leerlingen betreft de manier waarop zij nieuwe inhoud of problemen benaderen. Het betreft hier het onderscheid oppervlakte/diepte (naar Marton, besproken in Entwistle, 1985). Er zijn leerlingen die de opgaven oppervlakkig lezen. Ze streven niet naar inzicht, maar zijn gericht op reproductie en het behalen van een goed cijfer. Ze passen regeltjes toe zonder er bij na te denken. Ze gaan op een mechanistische wijze met bijvoorbeeld de wiskunde om.

Andere leerlingen passen een diepte-benadering toe. Ter illustratie laten we een leerling aan het woord. *In een interview met een groepje leerlingen zei Marianne: "Ja, Hans is in ons groepje nooit tevreden met een simpel antwoord. Hij wil alles altijd precies weten: waar het voor dient of het ook anders kan en waarom het zo is".*

Leerlingen met een diepte-benadering zoeken naar de betekenis in een breder verband. Ze leggen verbanden tussen ervaringen en kennis die ze al bezitten en nieuwe kennis. Ze proberen inzicht te verwerven. Opvallend is ook dat deze leerlingen van binnenuit gemotiveerd zijn: ze willen het echt uitzoeken en weten, ook zonder dat een cijfer als beloning meespeelt.

Gelukkig is het niet zo dat leerlingen simpelweg voor eens en voor altijd in oppervlakte- en diepte-leerders zijn in te delen. De leeromgeving, de opgaven en het klimaat in de klas spelen een belangrijke rol. Een leerling die in de ene situatie een diepte-benadering toepast kan in een andere situatie als een echte oppervlakte-leerling naar voren komen.

Het onderscheid oppervlakte/diepte moet dus niet als een absolute, onveranderlijke tweedeling worden opgevat. Leraren die oog voor dit onderscheid hebben, kunnen leerlingen helpen een diepte-benadering te volgen. Bijvoorbeeld door te laten zien dat er verschillende antwoorden bij een opgave te geven zijn en dat het reflecteren op die verschillende antwoorden belangrijk is, omdat daarmee een dieper inzicht voor alle leerlingen mogelijk is. Daarbij kunnen klassikale discussies een belangrijke rol spelen. Ook het samen met andere leerlingen (in een groepje) werken aan de oplossing van een probleem kan een belangrijk middel zijn om tot

inzicht te komen. Het klasseklimaat is hierbij heel belangrijk: 'foute' antwoorden bestaan eigenlijk niet, alle kinderen kunnen mee doen in een onderzoekstocht. Fouten vormen een didactische goudmijn: je kunt er veel van leren.

Natuurlijk is het niet zo dat daarmee verschillen tussen leerlingen onder tafel moeten worden gewerkt. Het kan niet zo zijn dat een leerling die de stelling van Pythagoras niet kan toepassen, toch een acht krijgt omdat "hij er zo leuk over kan praten".

Het is van groot belang dat regelmatig individuele 'diagnostische' toetsingen worden gehouden om te kijken of er leerlingen zijn die achterblijven. Bijvoorbeeld omdat ze bepaalde begrippen niet goed kennen of bepaalde oplossingsmethoden niet kunnen hanteren.

Scaffolding

Als blijkt dat er leerlingen zijn die bijvoorbeeld opgaven niet goed lezen, of bepaalde misconcepties hebben dan moeten deze leerlingen (tijdelijk) extra hulp krijgen. In cognitieve theorieën over het leren en onderwijzen wordt ter aanduiding van aangepaste en tijdelijke hulp die gericht is op de ontwikkeling naar zelfstandig leren wel de term 'scaffolding' (steigerbouw) gebruikt (Brown en Palinscar, 1986). Deze hulp kan door de leraar, door een medeleerling of zelfs door een computer worden gegeven. Zodra de leerling zelfstandig verder kan wordt de hulp weggehaald, zoals een steiger of een ladder wordt weggehaald, als het niet meer nodig is. 'Scaffolding' houdt ook in dat geen onnodige, belemmerende structuur moet worden aangeboden aan leerlingen die zelfstandig kunnen werken.

Als men leerlingen, die in staat zijn zelfstandig bepaalde problemen op te lossen, te veel stuurt in een bepaalde richting dan kan dat zelfs negatief interfereren met de oplossingsmethoden die ze zelf al kennen en hanteren. Dan kan het gebeuren dat deze goede leerlingen slechter gaan functioneren. Een praktisch voordeel om die leerlingen die het aankunnen, zoveel mogelijk zelfstandig te laten werken is dat de leraar over meer tijd beschikt om bepaalde leerlingen extra begeleiding te geven.

Het gaat er om dat alle leerlingen "leren denken onder eigen verantwoordelijkheid". Dat leer je alleen door het doen en als je dat nog niet kunt dan heb je recht op extra hulp en aandacht.

4.3. Het project Interne Differentiatie wiskunde-onderwijs 12-16

Het project ID 12-16 ging aan AGO 12-16 vooraf. De opdracht was een evaluatie te verrichten naar wiskunde-pakketten die door de project-groep Wiskunde 12-16 van de SLO waren ontwikkeld. Het onderzoek dat

ruim vijf jaar duurde, vond plaats in de onderbouw van het voortgezet onderwijs.

In het onderzoek namen (kwalitatieve) lesobservaties een belangrijke plaats in. Tijdens deze observaties werd niet alleen duidelijk hoe een wiskundepakket in zijn algemeenheid functioneerde. Tevens leverden deze observaties gegevens op over de verschillende kenmerken die ten grondslag lagen aan het ontwikkelde materiaal.

De algemene conclusie is dat het merendeel van de leerlingen dat gewerkt heeft met het SLO-materiaal een redelijke vooruitgang boekt en positief staat ten opzichte van de werkwijze in de klas en de gebruikte wiskunde materialen.

Kenmerken van de SLO-pakketten zijn:

1. werken in een heterogene jaarklas
2. samenwerking in heterogene subgroepjes
3. materiaal bevat verschillen in oplossingen en oplossingswegen
4. materiaal bevat rijke contexten

We bespreken enkele ervaringen die in het ID-onderzoek met betrekking tot de genoemde kenmerken zijn opgedaan en de lessen die daaruit voor het AGO-model werden getrokken.

In projectscholen (scholen die met het SLO-materiaal werken) wordt vaker en beter samengewerkt dan in vergelijkingsscholen, waar op meer traditionele wijze lesgegeven wordt. Toch bleek ook in de projectscholen de samenwerking in heterogene subgroepjes niet altijd even goed te verlopen. In sommige onderzoeksklassen was de effectieve leertijd tijdens groepswork minimaal. Andere klassen lieten juist tegenovergestelde resultaten zien. Bekend is dat zowel leerlingen als leerkrachten moeten leren om in groepjes te werken, respectievelijk groepjes te begeleiden.

Leerkrachten die deelnamen aan het ID-onderzoek kregen observatie-verslagen van de lessen die bij hen in de klas bijgewoond werden. Deze verslagen bleken regelrechte 'onthullingen'. Omdat leerkrachten bij de begeleiding van subgroepjes voortdurend korte contacten hebben, want er is altijd wel weer een ander groepje dat hulp behoeft, missen de leerkrachten dikwijls een totaalbeeld, van wat er in een subgroepje gebeurt. Enkele, van de in het onderzoek betrokken leraren werden door de rijkheid aan informatie van de observatieverslagen enthousiaste groepswork-adepten.

Leerlingen bleken behoefte te hebben aan afwisseling van werkvormen. Steeds maar weer in groepjes werken gedurende een lange periode is in het AGO-model doorbroken. Er vindt afwisselend klassikaal-, groepswork en individueel werk plaats.

Het kenmerk verschillen in oplossingen en oplossingswegen bleek een onderzoeksmatig lastig te meten en te observeren kenmerk te zijn. Aanvankelijk konden de onderzoekers binnen de groepjes geen verschillen in oplossingswegen/oplossingen constateren. Wel zagen ze verschillen in oplossingen tussen groepjes en het was dan afhankelijk van de leerkracht of er iets met de verschillen gebeurde. Soms merkten leerkrachten die verschillen niet op. Het kwam echter ook voor dat leerkrachten expliciet op zoek gingen naar verschillende oplossingen tussen groepjes, om die gevonden verschillen vervolgens in een klassikale discussie aan de orde te stellen. Dat de verschillen relatief weinig geconstateerd werden door de onderzoekers is voor een deel terug te voeren op de ontwikkelaars. De ontwikkelaars verwerkten weliswaar verschillen in de opdrachten, maar zij benadrukten in de leerlingteksten en de leerkrachtenhandleiding niet expliciet in welke opdrachten "ingebouwde" verschillen aangetroffen konden worden. Leerlingen bemerkten de verschillen niet altijd, want als zij eenmaal een antwoord gevonden hadden, dan was aan de opdracht voldaan. De leerkrachten in het ID-onderzoek bleken ook niet altijd alert op de mogelijke aanwezigheid van verschillen in oplossingswegen en oplossingen in bepaalde opdrachten.

Deze ervaringen hebben er toe geleid dat in de leerlingteksten (bv. het antwoordenboekje) en met name in de docentenhandleiding van het uitgewerkte AGO-materiaal expliciet gewezen wordt op de aanwezigheid van deze verschillen in oplossingen en oplossingswegen.

De contexten die in het SLO-materiaal gebruikt werden, bleken door jongens meer gewaardeerd te worden dan door meisjes. Contextgebruik biedt de mogelijkheid om aan te sluiten bij de beleavingswereld van leerlingen.

Al pratend met zijn klas kan een leerkracht nagaan wat de voorkeuren van de leerlingen is en tevens kan hij laten zien dat alledaagse gebeurtenissen, zoals gasverbruik, fietsen en vissen een wiskundige kern kunnen hebben (Herfs, 1985).

Een goede klassikale introductie van een opdracht waarin een rijke context verwerkt zit, werkt in zijn algemeenheid motiverend op leerlingen. Als bovendien de opdrachten 'spannend' zijn, dan is de les wat betreft motivatie en taakgerichtheid van leerlingen gegarandeerd hoog, zo wees de ervaring uit.

Toch zijn enkele kanttekeningen bij contextgebruik op zijn plaats. Op één van de onderzoeksscholen, waar veel allochtone leerlingen zaten, bleek het feit dat er zo veel gelezen moet worden bij contextrijke opdrachten hoge drempels op te werpen. Deze leerlingen konden niet uit de voeten met het SLO-materiaal. Echter niet alleen allochtone leerlingen bleken moeite te hebben met de vaak lange teksten. Ook autochtone

leerlingen, in met name LBO-klassen, blijken te struikelen over grote hoeveelheden tekst.

We stuiten hier op het dilemma dat rijke contexten enerzijds beogen te motiveren, doordat aangesloten wordt bij de beleavingswereld van de leerlingen, maar anderzijds door de taligheid sommige leerlingen afstoten. In de concretisering van het AGO-model is rekening gehouden met beide ervaringen. De hoeveelheid tekst van de opdrachten is kleiner dan bij het SLO-materiaal, terwijl de aansluiting met de beleavingswereld van de leerlingen door middel van contextgebruik in sommige opdrachten toch gerealiseerd is.

Uit het ID-onderzoek bleek dat sommige leerlingen achter bleven. Aanvullende, remediërende maatregelen zijn bijtijds nodig voor die leerlingen, die de minimum doelstelling niet behalen. In de AGO-methode zijn diagnostische toetsen en remediërende hulp, geënt op de toetsresultaten vaste onderdelen.

Voor meer informatie over het onderzoek ID 12-16 verwijzen we naar twee publicaties: Dekker, e.a. (1985) en Terwel, e.a. (1988). In de eerste is meer nadruk gelegd op de kwalitatieve resultaten (analyse van lesverslagen, e.d.); de tweede geeft een totaal overzicht met meer aandacht voor de kwantitatieve resultaten.

5. DISCUSSIE

Heterogene of homogene klassen

De keuze voor heterogene klassen treft men aan bij Freudenthal (1980) en bij de SLO (1985). In het advies van de Wetenschappelijke Raad voor het Regeringsbeleid (WRR, 1987) kiezen Treffers en Van der Blij eerder voor homogene klassen. Zij achten de verschillen tussen leerlingen zo groot, dat het ongewenst is ze langer dan een jaar in gemeenschappelijke klassen te laten zitten.

Een aantal verschillende factoren heeft invloed op de resultaten van sterke en zwakke leerlingen in homogene of heterogene klassen. Uit recent onderzoek is gebleken (Terwel, 1986), dat de meeste factoren bij homogene klassen werken ten gunste van de sterke leerlingen en ten nadele van zwakke leerlingen. In het algemeen functioneren klassen slechter naarmate de proportie zwakke leerlingen groter is.

Voor zwakke leerlingen is het dus beter in heterogene klassen te zitten. Uniform onderwijs aan heterogene klassen is echter een slechte zaak. Zowel de zwakke als de betere leerlingen moeten zich kunnen ontplooiën. Het AGO-model is een onderwijsvorm die met alle leerlingen rekening houdt.

Leerstof

Die leerlingen, die uiteindelijk doorstromen naar LBO en MAVO zijn niet gebaat met abstracte inleidingen, aldus Treffers en Van der Blij (WRR, 1987). Indien men deze stof voor de betere leerlingen wel nuttig acht, moet deze binnen het AGO-model dus niet tot de gemeenschappelijke leerstof behoren, maar aangeboden worden in de lessen na de D-toets, in de fase van de individuele leerwegen. In latere gemeenschappelijke stukken mag die abstracte stof dan wel bruikbaar zijn, maar geen verplichte voorkennis vormen.

Een andere opvatting is, dat ook voor de betere leerlingen de abstractie wordt uitgesteld. Dit geluid is bij de SLO te beluisteren. Beide standpunten zijn vertegenwoordigd in de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs, die de plannen voor de basisvorming wat betreft de wiskunde moet uitwerken.

Benodigde tijd

De vraag kan worden gesteld, of de gemeenschappelijke leerstof in hetzelfde tempo kan worden doorgewerkt als wanneer er individueel zou worden gewerkt. Bij individueel werk kan men natuurlijk niet van een bepaald tempo van de klas spreken. Er zal van een gemiddeld tempo worden uitgegaan, waarbij de langzaamsten zullen afhaken. Groepswerk dicteert een tempo, dat lager zal liggen dan wat voor een aantal leerlingen individueel haalbaar zou zijn: de zwakste leerlingen vragen tijd en aandacht. Daarnaast nemen ook de klassikale gesprekken tijd. Tenslotte is de rol van het huiswerk tijdens de gemeenschappelijke fase klein. Dit zijn vertragende factoren. Onderwijs, gegeven onder tijdsdruk, maakt toepassing van het AGO-model niet eenvoudig. Tegenover de vertragende factoren staat echter de verwachting dat de leerresultaten, speciaal bij zwakke leerlingen, hoger zullen zijn. Dit belooft tijdswinst bij later onderwijs: er zal dan minder herhaald hoeven te worden. Ook kan bij het groepsonderwijs de aandacht meer gelegd worden op het inzichtelijk leren tegenover het inoefenen van routines.

Organisatie

Het AGO-model vraagt veel organisatie van de kant van de docent. Iedere fase heeft zijn eigen moeilijkheden en mogelijkheden. Naarmate men langer met AGO werkt zal daarin natuurlijk meer routine optreden. Ook moet de vormgeving van het materiaal de docent ondersteunen. Een kwetsbaar punt is er bijvoorbeeld, wanneer de docent na de D-toets zich enige tijd intensief met de zwakste leerlingen bezighoudt. De rest van de klas moet dat 'toestaan'. In de huidige uitwerking van het model is gebruik gemaakt van hints en een antwoordenlijst naast de opgaven van het boek. Een andere mogelijkheid is de inzet van computer- ondersteund

onderwijs. Tenslotte kan ook helpen dat de 'lastposten' onder de zwakste leerlingen in deze fase inhoudelijk goed aan hun trekken kunnen komen en daardoor waarschijnlijk minder ordeverstoring zullen veroorzaken.

Materiaal

De presentatie van de leerstof moet aan een niet gering aantal eisen voldoen, wil er volgens het AGO-model mee gewerkt kunnen worden. Zo moeten er in de gemeenschappelijke fase opgaven worden gegeven die tot samenwerking uitnodigen, tot discussie aanzetten en verschillende oplossingsniveaus toelaten; er moeten ook rijke contexten zijn. Naarmate een bestaand programma voor de eerste twee jaren minder aan deze eisen voldoet, zal het minder lukken tussentijds enkele hoofdstukken in AGO-vorm te gieten (dit is de situatie van het project). Sommige leerstof wordt voor groepsonderwijs minder geschikt verondersteld, getuige het ontbreken van SLO-pakketjes voor groepsonderwijs voor meer algebraïsche onderdelen. Toch zijn er ook hier mogelijkheden in de gewenste richting; in de paragraaf 'soorten opgaven' staat een aantal voorbeelden.

Aan de globale ordening van de leerstof moet de eis worden gesteld, dat er - van kern tot kern - zo min mogelijk stapeling optreedt. Wanneer een bepaald hoofdstuk slecht ging voor een bepaalde leerling, moet bij het volgende hoofdstuk een nieuwe start mogelijk zijn. Enige stapeling is echter niet te vermijden: onderwerpen als bijvoorbeeld variabelen, vergelijkingen, functies vereisen meer dan één hoofdstuk.

Toetsing

Een essentieel onderdeel van de AGO-cyclus vormt de diagnostische toets. Deze moet de aanwijzingen geven voor de indeling voor de rest van een cyclus van de leerlingen in verschillende stromen. Correctie, foutenanalyse en bespreking vergen veel tijd en energie van de docent. Het is begrijpelijk, dat men poogt waar mogelijk deze activiteiten te minimaliseren, bijvoorbeeld door de leerlingen zelf met behulp van een antwoordenlijst het werk te laten nakijken. Het gevaar bestaat dan, dat men de opgaven zo samenstelt dat de hogere (inzichtelijke) vaardigheden niet aan bod komen, omdat de leerlingen daarbij niet simpelweg een goed-fout-beoordeling kunnen geven. En wil men zicht krijgen op de gemaakte fouten dan moet de docent zelf de uitwerkingen bestuderen. Vooral voor de zwakke leerlingen is dit van belang. De kennis van hun fouten is voor remediërende activiteiten onontbeerlijk. Een extra-moeilijkheid wordt gevormd door het feit, dat het nakijken van een diagnostische toets niet de schijn van beoordeling op zich mag laden; voor dat doel dient een eindtoets.

De toetsing aan het eind van een cyclus is vooralsnog buiten beschouwing gelaten. Toch zullen ook vorm en inhoud van deze toetsen

invloed uitoefenen op de gang van zaken in de AGO-cycli. Indien bijvoorbeeld niet op reflectie wordt getoetst kan de animo tot discussie over oplossingsmethoden afnemen. Evenzo moet de toets over meer gaan dan alleen de kernstof. Tenslotte heeft een eindtoets in het huidige onderwijs altijd een individueel karakter. Daarom is het goed, dat in de cyclus niet uitsluitend de samenwerkingsvorm wordt gehanteerd en dat bij de voortgang binnen een ronde het aandeel van het individueel werken toeneemt.

Discussie voor zwakke leerlingen

Niet ieder is er van overtuigd, dat zwakkere leerlingen geholpen zijn door discussie over verschillende oplossingen en oplossingsmethoden. Er wordt soms gepleit voor een meer gesloten, directieve benadering voor deze groep. De docent moet laten zien hoe het moet en als de leerlingen dat dan maar nadoen kan er niets misgaan. Dit leidt tot een verarmd wiskunde-onderwijs. Ervaringen uit het project Interne Differentiatie leerden dat discussie over opgaven ook zwakkere leerlingen kan helpen.

Stigmatisering

Uit contact met leraren kwam naar voren, dat leraren die met heterogene groepen werken, soms huiverig zijn voor het apart nemen van leerlingen die extra hulp nodig hebben. Men wilde niet door het formeren van een homogene groep een aantal leerlingen zo duidelijk als de 'dommen' aanwijzen. In principe is het echter mogelijk, dat zij die bij het ene onderwerp de D-toets onvoldoende maakten, bij het andere onderwerp juist goed voor de dag komen. Dit kan wanneer de onderwerpen zeer verschillend van aard zijn (bijvoorbeeld vergelijkingen en afbeelden). De homogene groep hoeft dus niet telkens uit dezelfde leerlingen te bestaan.

Het is belangrijk dat men de zwakke leerlingen zo goed mogelijk helpt op het moment dat daarom vraagt. Wanneer men doet alsof ze gewoon mee kunnen komen in de groepjes, zal de klap op een later moment harder aankomen.

Groepswerk naar SLO-model

Ook het Instituut voor de Leerplanontwikkeling propageert groepswerk. Het groepswerk is daarbij gekoppeld aan wiskunde aangeboden in brede contexten; series opdrachten zijn in verhalende situaties verpakt. Deze benadering is moeilijk voor meer algebraïsche onderwerpen als het leren oplossen van vergelijkingen. Voor het groepswerk wordt het zogenaamde knipperbolmodel gehanteerd (SLO, 1985): eerst moet ieder groepslid lezen, dan moet er gezamenlijk gebrainstormd worden en tenslotte wordt er met de groep als geheel de oplossing uitgewerkt. Hierbij moet tegelijk van fase naar fase worden overgestoken. Binnen de

huidige concrete uitwerking van het AGO-model is deze vorm soms van toepassing, maar de variatie aan werkvormen is groter. De contexten nemen een bescheidener plaats in.

Slot

Het laatste woord zal nog lang niet uitgesproken zijn met betrekking tot de voorgaande discussiepunten. Daarbij kan de lijst van 'voors' en 'tegens' bij de werkwijze van het AGO-model zeker nog worden uitgebreid. Voor commentaar op deze punten en op de brochure als geheel houden we ons aanbevolen. Mogelijk kunnen opmerkingen in de volgende fase van het onderzoek worden gebruikt.

6. LITERATUUR

Bodegraven, D. van, C.E. van Dusschoten, A. van der Horst, A. van Streun en H. van Tijum; Wiskundelijn, deel 2a; Jacob Dijkstra; Groningen, 1987.

Brown, A.L. en A.S. Palinscar; Guided cooperative learning and individual knowledge acquisition; Cambridge, Massachusetts; 1986.

Dekker, R., P. Herfs, J. Terwel en D. van der Ploeg; Interne Differentiatie in heterogene klassen bij wiskunde; Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs; 's-Gravenhage, 1985.

Ebbens, S.; Beter omgaan met heterogeniteit; School Advies Centrum; Utrecht, 1988.

Entwistle, N.; Explaining Individual Differences in School Learning. In: E. De Corte, H. Lodewijks, R. Parmentier en P. Span (Eds.) Learning and Instruction. European Research in an International Context; Vol. 1 (Studia Paedagogica 8); Leuven, University Press/Pergamon Press, 1987.

Freudenthal, H.; Weeding and Sowing, Preface to a Science of Mathematical Education; D.Reidel Publishing Company; Dordrecht, 1980.

Groen, W.E. en J. C. Perrenet; Hints, in Nieuwe Wiskrant 7 nr 1; 1987; pp. 13-18.

Heide, M. de; Het AGO-model in het geschiedenis onderwijs in het derde jaar van het voortgezet onderwijs. Eindopdracht interdisciplinair thema I: Basisvorming tot 15/16 jaar; Rijksuniversiteit Utrecht, Vakgroep Onderwijskunde (interne publikatie), 1986.

Herfs, P.; Een kwadratische functie aan de leerling(e) gebracht, in Nieuwe Wiskrant, 5 nr. 2; 1985; pp. 10-14.

Hiele, P.M. van; Boekbespreking van Dekker, e.a. 1985 in Pedagogisch Tijdschrift 11 nr 5, 1986; pp. 319, 320.

Lesh, R.A.; Applied Mathematical Problem Solving, in Educational Studies in Mathematics; 1981, nr.12; pp. 235-264.

Posthuma de Boer, M.W.; Werken met heterogene groepen. Een handleiding voor leerkrachten in de eerste fase van het voortgezet onderwijs met voorbeelden uit het wiskunde onderwijs; Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs; 's-Gravenhage, 1987.

SLO, Met het oog op de leerkracht in de praktijk van het werken met kleine heterogene groepen; Enschede, 1985.

Smit, H.J. en A.Verwey; Huiswerk voor wiskunde (2) in Euclides, maandblad voor de didactiek van de wiskunde, 58 nr 6, 1983; pp. 219-225.

Terwel, J.; Basisvorming en het ontwerpen van onderwijsleersituaties voor 12-16 jarigen, in Pedagogisch Tijdschrift 11, nr. 6; 1986; pp. 354-366.

Terwel, J, P. Herfs, R. Dekker en W. Akkermans; Implementatie en Effecten van Interne Differentiatie; Instituut voor Onderzoek van het Onderwijs; 's-Gravenhage, 1988.

Treffers, A.; Three Dimensions; D.Reidel Publishing Company; Dordrecht, 1987.

Wetenschappelijke Raad voor het Regeringsbeleid; Basisvorming in het Onderwijs; Staatsuitgeverij; Den Haag, 1986.